

Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I – Capítulo 1

Desigualdades, funciones reales y números complejos

1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

2. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log(|x - 6|(1 + |x - 3|))}$.
3. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geq 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f .
4. Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, justifica que la función $f : [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x) = \arcsin(\sin x)$ para $x \in [-3\pi + \pi/2, 3\pi + \pi/2]$.
5. Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que el número $w = \frac{2z - i}{z - 2i}$ es:
- a) Un número real.
 - b) Un número imaginario puro.
 - c) Un número de módulo 1.
6. Expresa los siguientes números complejos en forma cartesiana:

$$\text{a) } (-1 + i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^6 \quad \text{c) } (-\sqrt{3} + i)^{13}$$

7. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^4 = -1 \quad \text{b) } z^3 = -i \quad \text{c) } z^4 - i\sqrt{3}z^2 - 1 = 0$$

Para entregar el martes 2 de noviembre